

95 數學甲、數學乙合訂本

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 選擇題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 ³ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	<input type="checkbox"/> ¹	<input type="checkbox"/> ²	<input checked="" type="checkbox"/> ³	<input type="checkbox"/> ⁴	<input type="checkbox"/> ⁵	<input type="checkbox"/> ⁶	<input type="checkbox"/> ⁷	<input type="checkbox"/> ⁸	<input type="checkbox"/> ⁹	<input type="checkbox"/> ⁰	<input type="checkbox"/> ⁻	<input type="checkbox"/> [±]

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 ¹ 與 ³ 劃記，如：

5	<input checked="" type="checkbox"/> ¹	<input type="checkbox"/> ²	<input checked="" type="checkbox"/> ³	<input type="checkbox"/> ⁴	<input type="checkbox"/> ⁵	<input type="checkbox"/> ⁶	<input type="checkbox"/> ⁷	<input type="checkbox"/> ⁸	<input type="checkbox"/> ⁹	<input type="checkbox"/> ⁰	<input type="checkbox"/> ⁻	<input type="checkbox"/> [±]
---	--	---------------------------------------	--	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ...，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ⁻ 與第 21 列的 ⁷ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/> ¹	<input type="checkbox"/> ²	<input type="checkbox"/> ³	<input type="checkbox"/> ⁴	<input type="checkbox"/> ⁵	<input type="checkbox"/> ⁶	<input type="checkbox"/> ⁷	<input type="checkbox"/> ⁸	<input type="checkbox"/> ⁹	<input checked="" type="checkbox"/> ⁰	<input type="checkbox"/> ⁻	<input type="checkbox"/> [±]
21	<input type="checkbox"/> ¹	<input type="checkbox"/> ²	<input type="checkbox"/> ³	<input type="checkbox"/> ⁴	<input type="checkbox"/> ⁵	<input type="checkbox"/> ⁶	<input checked="" type="checkbox"/> ⁷	<input type="checkbox"/> ⁸	<input type="checkbox"/> ⁹	<input type="checkbox"/> ⁰	<input type="checkbox"/> ⁻	<input type="checkbox"/> [±]

※請依各科考試時間及試場規則，誠實試做每一題（含非選擇題）。

※每完成試考一年度後，閱讀光碟內建「詳解」，以熟悉題型、掌握題性，再做另一年度。

※誠實試考的作用：一、提昇實力；二、預測現有實力大概的落點位置。

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 77 分)

一、單選題 (18%)

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 試問方程式 $(x^2+x+1)^3+1=0$ 有幾個相異實數解？

(1) 0 個	(2) 1 個	(3) 2 個
(4) 3 個	(5) 6 個	

2. 在坐標平面上，設 P 為 $y=2+x-x^2$ 圖形上的一點。若 P 的 x 坐標為 $\log_3 10$ ，則 P 點的位置在

(1) 第一象限	(2) 第二象限	(3) 第三象限
(4) 第四象限	(5) 坐標軸上	

3. 在坐標平面上給定兩點 $A(1,3)$ 與 $B(5,6)$ 。考慮坐標平面上的點集合 $S=\{P \mid \Delta PAB \text{ 之面積為 } 10 \text{ 且周長為 } 15\}$ ，則

(1) S 為空集合	(2) S 恰含 2 個點	(3) S 恰含 4 個點
(4) S 為兩線段之聯集	(5) S 為兩直線之聯集	

二、多選題 (24%)

說明：第 4 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 擲一枚均勻硬幣 4 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 a_n ；擲一枚均勻硬幣 8 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 b_n 。試問以下哪些選項是正確的？

(1) $a_2 = \frac{1}{2}$	(2) $a_2 = b_4$	(3) $b_2 = b_6$
(4) $a_3 > b_3$	(5) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_8$ 中的最大值是 b_4	

5. 在坐標平面上以 Γ 表示拋物線 $y = x^2$ 的圖形。試問以下哪些方程式的圖形可以由 Γ 經適當的平移或旋轉得到？

(1) $y = 2x^2$	(2) $y = -x^2$	(3) $x = y^2$
(4) $y = x^2 + 4x + 3$	(5) $(x+y) = (x-y)^2$	

6. 考慮多項式函數 $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 + 3$ ，試問以下哪些選項是正確的？

(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{f(k+100)} = 0$ (k 為正整數)；

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$ ；

(3) 函數 f 在區間 $[\frac{1}{2}, 1]$ 遞增；

(4) 若 $x \geq 0$ ，則 $f(x) \geq 0$ ；

(5) 在坐標平面上 $y = f(x)$ 的圖形與直線 $y = 3$ 恰有兩個交點。

三、選填題 (35%)

說明：A至E各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(7-24)內。每一題完全答對得7分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 設 \vec{u} , \vec{v} 為兩非零向量。以 $|\vec{u}|$ 表 \vec{u} 之長度，若 $|\vec{u}| = 2|\vec{v}| = |2\vec{u} + 3\vec{v}|$ ，且 θ 表 \vec{u} 與 \vec{v} 之

夾角，則 $\cos \theta = \frac{\textcircled{7}\textcircled{8}}{\textcircled{9}}$ 。(化成最簡分數)

B. 在坐標空間中，球面 S 交 xy 平面於一半徑為 $\sqrt{13}$ 、圓心為 $(2, 3, 0)$ 的圓，且 S 通過點 $(6, 6, 6)$ ，則 S 的半徑為 $\sqrt{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。

C. 設實係數二階方陣 A 滿足 $A \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

則 $a = \textcircled{12}$, $b = \textcircled{13}\textcircled{14}$, $c = \textcircled{15}\textcircled{16}$, $d = \textcircled{17}$ 。

D. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在

常數 r, s 使得 $P(n+1) = r + sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，則 $r = \frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，
 $s = \frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{\textcircled{22}}$ 。(化成最簡分數)

E. 以 O 表坐標平面的原點。給定一點 $A(4, 3)$ ，而點 $B(x, 0)$ 在正 x 軸上變動。若 $l(x)$ 表 \overline{AB} 長，則 ΔOAB 中兩邊長比值 $\frac{x}{l(x)}$ 的最大值為 $\frac{\textcircled{23}}{\textcircled{24}}$ 。(化成最簡分數)

——— 以下部分作答於答案卷 ———

第貳部分：非選擇題（佔 23 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題前。

- 一. (1) (3 分) 將 48510 分解成質因數的乘積。
 (2) (7 分) 寫出在 1 和 250 之間且與 48510 互質的所有合數(合數就是比 1 大而不是質數的整數)。
- 二. 傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。
- (1) (2 分) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？
 (2) (6 分) 試求定海神針原來的長度。
 (3) (5 分) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

常用數值

1. $\pi \approx 3.1416$
2. $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $\sqrt{3} \approx 1.7321$, $\sqrt{5} \approx 2.2361$, $\sqrt{7} \approx 2.6458$ 。
3. $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ 。

後附數學乙題目

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 74 分)

一、單選題（18%）

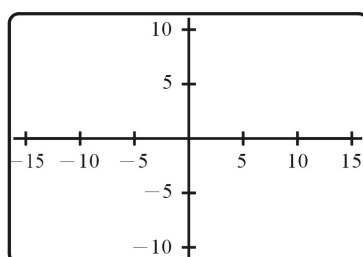
說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 在坐標平面上，選出與圓 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$ 相切的直線：
- (1) $3x+4y=5$ (2) $3x+4y=0$ (3) $4x+3y=5$
 (4) $4x+3y=0$ (5) $4x+3y=1$

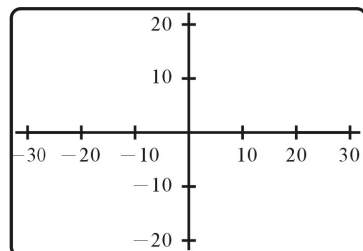
5. 一個「訊息」是由一串5個數字排列組成，且每位數字都只能是0或1，例如10010與01011就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串10010與01011在第1, 2及5三個位置不同，所以訊息10010與01011的距離為3。

試問以下哪些選項是正確的？

- (1) 與訊息10010相距最遠的訊息為11101
 - (2) 任兩訊息之間的最大可能距離是4
 - (3) 與訊息10010相距為1的訊息恰有5個
 - (4) 與訊息10010相距為2的訊息恰有9個
6. 一個函數繪圖軟體的視窗預設的坐標平面之可視範圍為 $-15 \leq x \leq 15$ 及 $-10 \leq y \leq 10$ ，如下圖所示：



當我們把視窗的比例尺調整為原來的二分之一時，視窗的可視範圍變成 $-30 \leq x \leq 30$ 及 $-20 \leq y \leq 20$ ，如下圖所示：

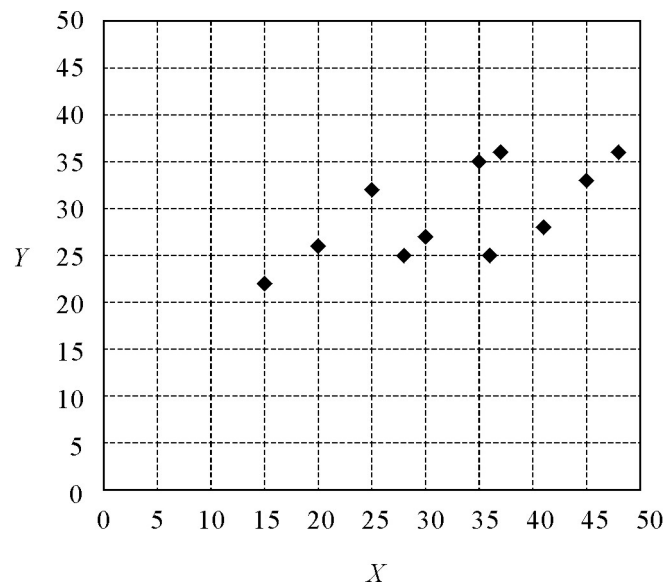


試問以下哪些選項是正確的？

- (1) 如果把視窗的比例尺調整為原來的三分之一，那麼視窗的可視範圍變成 $-45 \leq x \leq 45$ 及 $-30 \leq y \leq 30$ ；
 - (2) 如果把視窗的比例尺調整為原來的二分之一，那麼坐標平面上任一直線的斜率也變成原來的二分之一；
 - (3) 使用預設的視窗時，只能看到 $y = x^2 - 30x + 190$ 與 $y = 5x - 60$ 這兩個圖形的一個交點；
 - (4) 如果把視窗的比例尺調整為原來的五分之一，就可以看到 $y = x^2 - 30x + 190$ 與 $y = 5x - 60$ 這兩個圖形所有的交點。
7. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部分。下列的散佈圖中每個點 (X, Y) 分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分， Y 表該生非選擇題的得分。設

$$Z = X + Y$$

為各生在該測驗的總分。共有11位學生的得分數據。



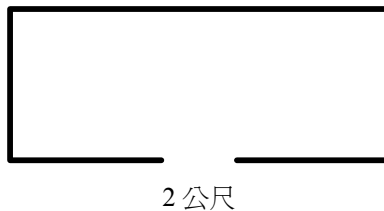
試問以下哪些選項是正確的？

- (1) X 的中位數 $>$ Y 的中位數
- (2) X 的標準差 $>$ Y 的標準差
- (3) X 的全距 $>$ Y 的全距
- (4) Z 的中位數 = X 的中位數 + Y 的中位數

三、選填題 (24%)

說明：A至C各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (8-15) 內。每一題完全答對得8分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

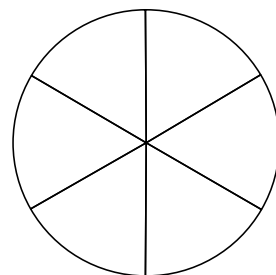
- A. 一農夫想用66公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬2公尺的出入口，如下圖示。此農夫所能圍成的最大面積為 ⑧⑨⑩ 平方公尺。



- B. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過 8° 。某建築公司打算在離機場中心3公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高5公尺的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋 ⑪⑫ 層樓。

[參考數據： $\sin 8^\circ \approx 0.1392$, $\cos 8^\circ \approx 0.9903$, $\tan 8^\circ \approx 0.1405$]

- C. 如下圖所示，某摩天輪等分為6個全等區域。為了夜間的燈光造景，6個區域分別採用不同顏色的燈光裝飾。若有7種不同顏色的燈光可供使用，則此



摩天輪正面的夜間燈光造景共有 ⑬⑭⑮ 種不同的顏色排列方式。

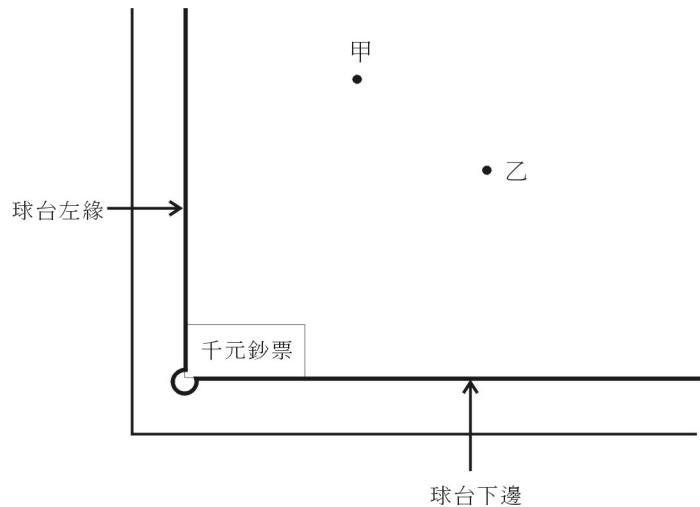
—— — — — — 以下部分作答於答案卷 —— — — — —

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、珈慶杯撞球大賽的勝負是這樣決定的：裁判將寬 16 公分、長 7 公分的千元鈔票

貼邊放置在長方形球台的左下角，如右圖所示。甲、乙兩參賽者分別擊球，球靜止位置離鈔票中心點較近者獲勝。甲、乙擊球後，裁判拿尺仔細量得甲所擊球停在離球台左緣 23 公分，離球台下邊 39.5 公分處；乙所擊球停在離球台左緣 40 公分，離球台下邊 27.5 公分處。



(1) 已知 $\sqrt{1521}$ 是一個正整

數，求此正整數。

(3分)

(2) 求甲所擊球停止位置與鈔票中心點的距離。

（答案必須以最簡單的形式表示）

(4分)

(3) 如果你是裁判，你會裁定甲或乙獲勝？理由為何？

(6分)

二、為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A、至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。

這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0, y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x, y 必須滿足的不等式組。

(3分)

(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x, y 的值為何？

最少的飼料成本又是多少？

(10分)