

96 數學甲、數學乙合訂本

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 與 劃記，如：

5	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 與第 21 列的 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※請依各科考試時間及試場規則，誠實試做每一題（含非選擇題）。

※每完成試考一年度後，閱讀光碟內建「詳解」，以熟悉題型、掌握題性，再做另一年度。

※誠實試考的作用：一、提昇實力；二、預測現有實力大概的落點位置。

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共佔 79 分）

一、單選題（18 分）

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 設 $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ ，試問複數 $1-z$ 的絕對值為以下哪一選項？

(1) $2\sin \frac{\pi}{7}$

(2) $\sin \frac{2\pi}{7}$

(3) $\sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{7}$

(4) $\sqrt{2}(1 - \cos \frac{2\pi}{7})$

(5) $\sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{7}}$

2. 試問下列有關極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確？

(1) 極限不存在

(2) 極限為 0

(3) 極限為 1

(4) 極限為 5

(5) 極限為 -2

3. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 是一等比數列，其首項 $a_1 > 1$ 且公比 $r > 1$ 。坐標平面上有一質點 M 自原點 $(0, 0)$ 出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點 $(5+5\log 2, 5+\frac{15}{2}\log 2)$ 的位置上，試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1, r) 為以下哪一

選項？

(1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

(2) $(2\sqrt{2}, \sqrt{5})$

(3) $(2, \sqrt{2})$

(4) $(5, \sqrt{5})$

(5) $(5, \sqrt{2})$

二、多選題(40分)

說明：第4至8題，每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題8分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1.6分，每答錯一個選項，倒扣1.6分，完全答對得8分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣1.6分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 某校高三共有300位學生，數學科第一次段考、第二次段考成績分別以 X 、 Y 表示，且每位學生的成績用0至100評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為0.016，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) X 與 Y 的相關情形可以用散佈圖表示
 - (2) 這兩次段考的數學成績適合用直線 $X=a+bY$ 表示 X 與 Y 的相關情形 (a, b 為常數， $b \neq 0$)
 - (3) $X+5$ 與 $Y+5$ 的相關係數仍為0.016
 - (4) $10X$ 與 $10Y$ 的相關係數仍為0.016
 - (5) 若 $X' = \frac{X - \bar{X}}{S_x}$ 、 $Y' = \frac{Y - \bar{Y}}{S_y}$ ，其中 \bar{X} 、 \bar{Y} 分別為 X 、 Y 的平均數， S_x 、 S_y 分別為 X 、 Y 的標準差，則 X' 與 Y' 的相關係數仍為0.016
5. 設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，試問下列哪些選項是正確的？
- (1) $P(x)=0$ 與 $Q(x)=0$ 有共同的實根
 - (2) 3是 $P(x)=2$ 唯一的實根
 - (3) $P(x)$ 不能被 $x-4$ 整除
 - (4) $P(x)=0$ 一定有小於3的實根
 - (5) $P(x)$ 除以 $(x-3)(x+3)$ 的餘式也是2
6. 設 a 是不為零的實數，且以下的三元一次方程組有解：

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \\ \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases}$$

試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $a=2$
- (2) 原方程組有唯一解

$$(3) \text{ 方程組 } \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{x}{a} = z-2 \end{cases} \text{ 有無窮多解}$$

$$(4) \text{ 方程組 } \begin{cases} \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases} \text{ 有唯一解}$$

$$(5) \text{ 方程組 } \begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \end{cases} \text{ 有無窮多解}$$

7. 有關矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 與矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

(1) $AB = BA$

(2) $A^2B = BA^2$

(3) $A^{11}B^3 = B^6A^5$

(4) $AB^{12} = A^7$

(5) $(ABA)^{15} = AB^{15}A$

8. 考慮坐標平面上函數 $y = x^3 + 2x + 3$ 的圖形 (x 為任意實數)，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 圖形有最高點，也有最低點

(2) 圖形有水平切線

(3) 圖形與任一水平直線恰有一交點

(4) 若 (a, b) 在圖形上，則 $(-a, -b+6)$ 也在圖形上

(5) 圖形與三直線 $x=0, x=1, y=0$ 所圍成的區域之面積大於 4

三、選填題 (21 分)

說明：A 至 C 各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (9-18) 內。
每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 某公司共有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$ ，其中 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，

爲了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若爲不良品，則此不良品是來自第五個工廠的機率爲 $\frac{\textcircled{9}}{\textcircled{10}\textcircled{11}}$ 。(化成最簡分數)

- B. 在坐標平面上，一圓通過點 $(-2, 7)$ ，且與直線 $4x+3y-14=0$ 相切於點 $(-1, 6)$ ，若此圓的方程式爲 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ，則 $a = \underline{\textcircled{12}\textcircled{13}}$ ， $b = \underline{\textcircled{14}\textcircled{15}}$ ， $c = \underline{\textcircled{16}}$ 。
- C. 張師傅想爲公司設計底面爲正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積爲432平方公分的限制之下，爲了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計爲 $\underline{\textcircled{17}\textcircled{18}}$ 公分。

—— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 —— — — — —

第貳部分：非選擇題 (佔 21 分)

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號((1)、(2))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題前。

- 一. 設 $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$ ，且 a, b 是方程式 $f(x) = 0$ 的兩正根。
- (1) (3分) 求解三次方程式 $f(x) = 0$ 。
- (2) (8分) 若 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = a$ ， $\overline{BC} = b$ ， $\angle ACB = 120^\circ$ ，且 D, E 是 \overline{AB} 上兩點，滿足 $\overline{BD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AE} = \overline{AC}$ ，試求 $\triangle CDE$ 的面積。
- 二. 設 $\triangle ABC$ 的三頂點坐標分別爲 $A(-2, 7, 15)$ 、 $B(1, 16, 3)$ 、 $C(10, 7, 3)$ 。
- (1) (5分) 試求通過 A 、 B 、 C 三點的平面方程式。
- (2) (5分) 試求 $\triangle ABC$ 的外心坐標。

後附數學乙題目

第壹部分：選擇題 (單選題、多選題及選填題共佔 74 分)

一、單選題 (18分)

說明：第 1 至 3 題爲單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得6分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣1.5分，倒扣到本大題之實得分數爲零爲止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 科學家測得南極上空臭氧層的破洞面積大約是2300萬平方公里，約相當於北美洲的面積。根據上述數據，估計地球的表面積，請選出最接近地球表面積的選項：

- (1) 5×10^6 平方公里 (2) 5×10^7 平方公里 (3) 5×10^8 平方公里
 (4) 5×10^9 平方公里 (5) 5×10^{10} 平方公里

2. 某地區12歲以上人口中吸煙的比率為28%。今將12歲以上人口區分為中老年、青壯年及青少年三類，所佔比率各為30%、45%及25%。已知中老年與青壯年人口中吸煙的比率各為25%與30%，請問青少年人口中吸煙的比率為多少？選出正確的選項：

- (1) 24% (2) 28% (3) 32% (4) 36% (5) 40%

3. 中國古代流傳的一本數學書中有下面這段文字：(標點符號為現代人所加)

今有多數21，少數15，問等數幾何？草曰：置21於上，15於下，以下15除去上21，上餘6；又以上6除去下15，下餘3；又以下3除去上6，適盡。則下3為等數合問。

在上文中「等數」指的是：

- (1) 兩數之和 (2) 兩數之差 (3) 兩數之積
 (4) 兩數之商 (5) 兩數之最大公因數

二、多選題 (32分)

說明：第4至7題，每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題8分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1.6分，每答錯一個選項，倒扣1.6分，完全答對得8分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣1.6分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 假設地面是一個可以無限延伸的平面，如果採用形狀大小一致的大理石地磚鋪在地面上，並且要求鋪設時地磚之間緊密連接不留空隙，試問可以採用哪一種形狀的地磚？請選出正確的選項：

- (1) 正三角形
 (2) 正方形
 (3) 圓形
 (4) 正五邊形
 (5) 正六邊形

5. 下面每一個選項都是以行列式表達坐標平面上的方程式，請問哪些選項代表橢圓？

$$(1) \begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} x^2 & 2y^2 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 2x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4) \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & y & x^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(5) \begin{vmatrix} x^2 - y^2 & y & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. 假設 a, b 是整數，且 $b \neq 0$ 。已知 $c = \frac{a}{3} + \frac{b\sqrt{2}}{3}i$ 是實係數一元二次方程式 $x^2 + kx + 1 = 0$ 的一個解。請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\frac{1}{c}$ 是上述方程式的另外一個解

(2) $\frac{1}{c} = \frac{a}{3} - \frac{b\sqrt{2}}{3}i$

(3) $c + \frac{1}{c} = k$

(4) k 一定是整數

(5) a 一定是奇數

7. x 代表實數，請選出正確的選項：

(1) 當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時， $\cos 2x$ 之值恆為正

(2) 當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時， $\sin 2x$ 之值恆為正

(3) 不論 x 為何， $\cos^2 x - \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$ 恆成立

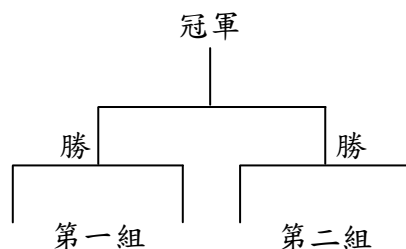
(4) 不論 x 為何， $\sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$ 恆成立

(5) 不論 x 為何， $\sin x + \cos x \leq \frac{3}{2}$ 恆成立

三、選填題（24分）

說明：A至C各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8-14）內。每一題完全答對得8分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

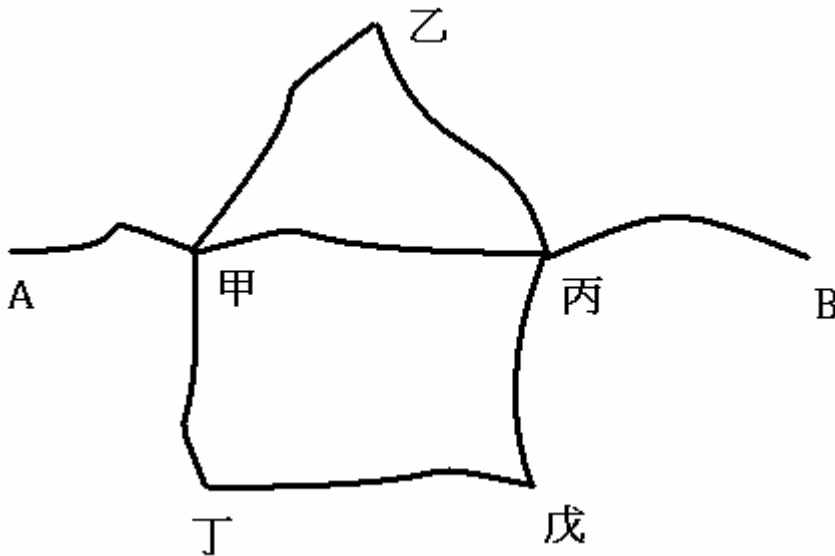
A. 某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如下圖：



根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5。則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為 0.8 9 10（四捨五入到小數三位）。

B. 平面上坐標皆為整數的點稱為格子點。我們將原點以外的格子點分層，方法如下：若 (a,b) 是原點 $(0,0)$ 以外的格子點，且 $|a|$ 和 $|b|$ 中最大值為 n ，則稱 (a,b) 是在第 n 層的格子點（例如 $(3,-4)$ 是在第 4 層； $(8,-8)$ 是在第 8 層）。則在第 15 層的格子點個數為 ⑪ ⑫ ⑬。

C. 如圖



A城到B城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如圖所示。今從A城出發走向B城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，則總共有 ⑭ 種走法。

———以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷———

第貳部分：非選擇題（佔 26 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

- 一、某別墅有一個由四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線(假設路燈是一個點光源)透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為 $(-4,40)$ ， $(16,0)$ ， $(16,40)$ 和 $(28,16)$ 。求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。(13分)
- 二、設 r, s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因式分解是 $x^3 + rx + s = (x+a)^2(x+b)$ ，其中 a, b 為相異實數，求證 a, b 都是有理數。(13分)