

97 數學甲、數學乙合訂本

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答，並標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一) 單選題及多選題：只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 ₃ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 ₁ 與 ₃ 劃記，如：

5	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
---	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ₂₀ 與第 21 列的 ₇ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※請依各科考試時間及試場規則，誠實試做每一題（含非選擇題）。

※每完成試考一年度後，閱讀光碟內建「詳解」，以熟悉題型、掌握題性，再做另一年度。

※誠實試考的作用：一、提昇實力；二、預測現有實力大概的落點位置。

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共佔 74 分）

一、單選題（12 分）

說明：第 1 至 2 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

- 已知正整數 n 可以寫成兩個整數的平方和。試問 n 除以 8 的餘數不可能為以下哪一選項？
 (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 5 (5) 6
- 在與水平面成 10° 的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角 60° 平行投射在山坡上時，旗竿的影子長為 11 公尺，如下圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。

試問旗竿的長度最接近以下哪一選項？

- (1) 19.1 公尺 (2) 19.8 公尺 (3) 20.7 公尺 (4) 21.1 公尺 (5) 21.7 公尺

參考數值：

$$\sin 10^\circ \approx 0.174, \quad \sin 20^\circ \approx 0.342, \quad \cos 10^\circ \approx 0.985, \quad \cos 20^\circ \approx 0.940, \quad \sqrt{3} \approx 1.732。$$

二、多選題（48 分）

說明：第 3 至 8 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不扣分。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

- 設 A 為坐標平面上代表旋轉某個角度的二階方陣，且已知 $A^6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。試問 A 可能是以下哪些選項中的方陣？

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{3} & -\sin \frac{5\pi}{3} \\ \sin \frac{5\pi}{3} & \cos \frac{5\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{6} & \sin \frac{5\pi}{6} \\ -\sin \frac{5\pi}{6} & \cos \frac{5\pi}{6} \end{bmatrix}$$

4. 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板 1 次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局為止。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 第一局甲就出局的機率是 $\frac{1}{3}$
- (2) 第一局就有人出局的機率是 $\frac{1}{2}$
- (3) 第三局才有人出局的機率是 $\frac{3}{64}$
- (4) 已知到第十局才有人出局，則甲出局的機率是 $\frac{1}{3}$
- (5) 該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於 $\frac{1}{1000}$

5. 某人進行一實驗來確定某運動之距離 d 與時間 t 的平方或立方成正比，所得數據如下：

時間 t (秒)	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25
距離 d (呎)	0.95	3.69	9.71	14.88	22.32	39.34	48.68	53.65	71.79








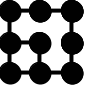
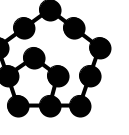
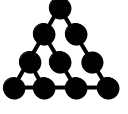
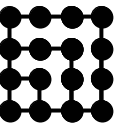
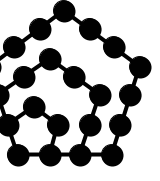
為探索該運動的距離與時間之關係，令 $x = \log_2 t$ ， $y = \log_2 d$ ，即將上述的數據 (t, d) 分別取以 2 為底的對數變換，例如： $(2, 53.65)$ 變換後成為 $(1, 5.74)$ 。已知變換後的數據 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_9, y_9)$ 之散佈圖及以最小平方方法所求得變數 y 對變數 x 的最適合直線（或稱迴歸直線）為 $y = a + bx$ ，如下圖所示：

- (3) 若拋物線 Γ 也通過點 $(10, 11)$ ，則其準線方程式必為 $y+6=0$
- (4) 直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的頂點
- (5) 直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線 Γ 的焦點

三、選填題 (14 分)

說明：A、B 兩題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (9-14) 內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊1個鋼珠			
每邊2個鋼珠			
每邊3個鋼珠			
每邊4個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n = \underline{\textcircled{9}}$ ， $m = \underline{\textcircled{10} \textcircled{11} \textcircled{12}}$ 。

- B. 若空間中一球面 S 與兩平面 $z=4$ 及 $z=8$ 相交的圓面積皆為 36π ，則 S 與平面 $z=7$ 相交的圓面積為 $\underline{\textcircled{13} \textcircled{14}} \pi$ 。

-----以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 -----

第貳部分：非選擇題 (佔 26 分)

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號((1)、(2))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題前。

- 一、(12 分) 設 $p(x)$ 為三次實係數多項式函數，其圖形通過 $(1, 3)$ 、 $(-1, 5)$ 兩點。若 $p(x)$ 的圖形在點 $(1, 3)$ 的切線斜率為 7，而在點 $(-1, 5)$ 的切線斜率為 -5 ，試求 $p(x)$ 。

二、設 $\triangle ABC$ 的三高分別為 $\overline{AD}=6$ 、 $\overline{BE}=4$ 、 $\overline{CF}=3$ 。

(1) (6分) 試證： $\triangle ABC$ 是一鈍角三角形。

(2) (8分) 試求 $\triangle ABC$ 的面積。

後附數學乙題目

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共佔 74 分)

一、單選題 (18分)

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得6分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣1.5分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 根據一百多年來的氣象紀錄，美國費城年雨量平均值為41.0英吋，標準差為6.1英吋。今欲將此項統計資料的單位由英制換為公制，請問該城市一百多年來年雨量的標準差最接近下列的哪一個選項？(註：1英吋等於25.4毫米。)

(1) 0.240毫米 (2) 1.61毫米 (3) 6.10毫米 (4) 155毫米 (5) 1041毫米

2. 兩向量以 \vec{a} 和 \vec{b} 表示，並以 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 表示 \vec{a} 和 \vec{b} 的內積，以 $|\vec{a}|$ ， $|\vec{b}|$ 分別表示 \vec{a} 和 \vec{b} 的長度，試問下列哪一個選項表示：「三角形兩邊中點的連線段與第三邊平行，且其長度為第三邊之半。」？

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(2) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

(4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b})$

(5) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

3. 解下列聯立方程式時，

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x - 5y = -1 \end{cases}$$

將相關的係數與常數以矩陣 A 表達如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

對矩陣 A 進行高斯消去法的一個步驟：第一列不改變，並將第二列減去第一列的

四倍成爲新的第二列。

試問下列哪一個選項中的矩陣乘積代表對 A 進行上述步驟？

$$(1) \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

二、多選題 (32分)

說明：第 4 至 7 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分，整題未作答者，不給分亦不扣分。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數爲零爲止。

4. 有一個不公正的骰子，投擲的時候，二點、三點、四點、五點和六點出現的機率都是 $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$ ，今以 a 表 $\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)$ ，以 b 表投擲的時候一點出現的機率，請選出正確的選項。

$$(1) a > 0 \quad (2) a > 1 \quad (3) b < \frac{1}{6}$$

$$(4) b < \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right) \quad (5) a > b$$

5. 給定二次多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，已知多項式 $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ 除以 $f(x)$ 其餘式爲 $3x + 2$ ，多項式 $x^3 + x^2 - x - 1$ 除以 $f(x)$ 其餘式爲 $4x + 1$ ，請選出正確的選項。

$$(1) a = 3 \quad (2) b = -1$$

(3) 方程式 $f(x) = 0$ 無實根

$$(4) f(x) \text{ 的極小值爲 } \frac{5}{4}$$

(5) $f(x)$ 除以 $(x+3)$ 其餘式爲 1

6. 有四個相異的正整數，由小到大依序爲 k, l, m, n ，其和等於 16，亦即 $0 < k < l < m < n$ ， $k + l + m + n = 16$ 。請問單獨再增加下列哪一個選項中的條件，可以保證 k 等於 1？

(1) l 是奇數， m 是偶數

(2) l, m 是偶數

(3) k, l, m, n 是等差數列

(4) l, n 是奇數

(5) l, m 是奇數

7. 請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a ，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$ ？

- (1) $-1, 0$
 (2) $1, 2, 3, \dots$ (所有的正整數)
 (3) $-3, -4, -5, \dots$ (所有小於 -2 的整數)
 (4) $97, 2008$
 (5) $-\pi, \pi$ (π 是圓周率)

三、選填題 (24 分)

說明：A 至 C 各題為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號 (8-14) 中標示答案。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 趙氏與錢氏兩對夫婦、以及孫先生、李先生圍坐一個六人座圓桌吃飯，其中趙先生和孫先生已在兩個相鄰的位子坐定。若限定夫妻不得相鄰，則其他四人就座的方法共有 ⑧⑨ 種。

B. 從集合 $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \text{ 爲 } 0, 1, 2 \text{ 或 } 3 \right\}$ 中隨機抽取一個矩陣，其行列式為 0 的機率等於

$$\frac{\textcircled{10}}{\textcircled{11} \textcircled{12}} \text{。 (化爲最簡分數)}$$

C. 若三角形 ABC 的 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AC} = 4\sqrt{5}$ 及 $\cos \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ，則 $\sin \angle ACB = \frac{\textcircled{13}}{\textcircled{14}}$ 。

(化爲最簡分數)

—————以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷—————

第貳部分：非選擇題 (佔 26 分)

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號 (一、二)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

- 一、坐標平面上有兩條拋物線，第一條拋物線的頂點在 $(-4, 0)$ ，焦點在 $(-4, 4)$ ，第二條拋物線的頂點在 $(4, 4)$ ，焦點在 $(4, 0)$ ，求兩條拋物線的交點。(13 分)
- 二、建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋。企劃部門的規劃如下：甲型屋每棟地價成本為 500 萬元，建築費用為 900 萬元，乙型屋每棟地價成本為 200 萬元，建築費用為 1500 萬元，公司在資金部分限制地價總成本上限為 3500 萬元，所有建築費用的上限為 1 億 2000 萬元；無論甲型或乙型售出，每棟獲利皆為 500 萬元，假設推出的預售屋皆可售出，請問推出甲、乙兩型預售屋各幾棟，公司才可得到最大利潤。(13 分)